

№11-дәріс

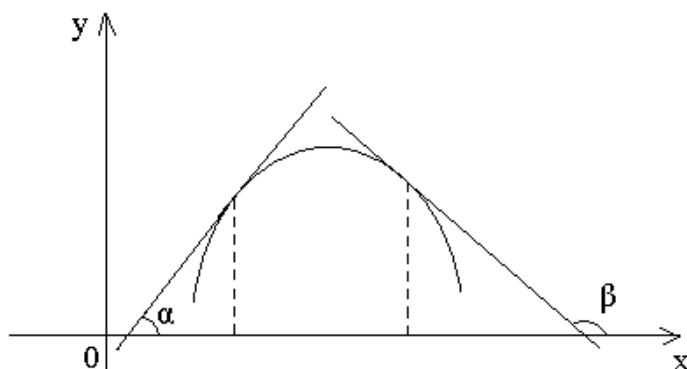
Функциялардың өсу және кему шарттары. Функциялар экстремасы. Қисықтың дөңес және қисықтығы, иілу нүктелері. Асимптоты кестесінің функциялары

Функцияның өсу және кему аралықтары. Экстремумдар

Теорема 1. $f(x) \in C^1(a;b)$ болсын. Онда, егер

- а) $f(x)$ функциясы $(a;b)$ аралығында өссе (кемісе), онда $(a;b)$ аралығында $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$],
б) $(a;b)$ аралығында $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$] болса, онда $f(x)$ функциясы $(a;b)$ аралығында өседі (кемиді).

Геометриялық тұрғыдан, функция өсетін болса, онда қисықтың жанамасы мен Ox осінің арасындағы бұрыш $\frac{\pi}{2}$ -ден кіші, ал функция кемитін болса, онда бұл бұрыш $\frac{\pi}{2}$ -ден үлкен.

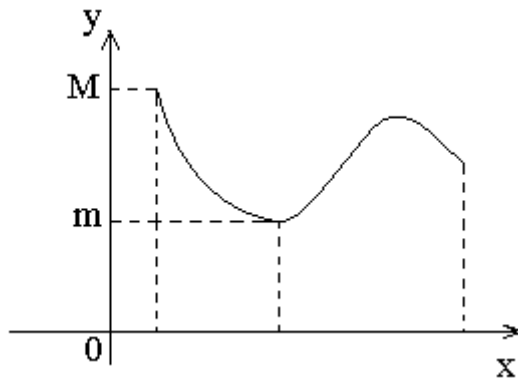


Теорема 2. (экстремумның бар болуының қажетті шарты).

x_1 нүктесі $f(x)$ функциясының кризистік нүктесі болсын, ал $U(x_1)$ - x_1 нүктесін ұстайтын интервал. Онда, егер

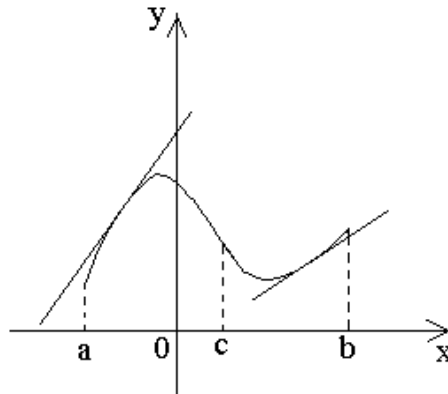
- а) $f(x)$ функциясы $U(x_1)$ -де үзіліссіз және $U(x_1)$ -де дифференциалданатын болса (ол x_1 нүктесінің өзі де болуы мүмкін), онда x_1 нүктесі максимум [минимум] ($\max[\min]$) нүктесі болады, егер x_1 нүктесінің сол жағынан оң жағына өткенде, таңба «+»-тен «-»-ке өзгереді болса [«-»-тен «+»-ке өзгерсе],
б) $f'(x_1) = 0$ және $U(x_1)$ -де $\exists f''(x)$ болса, онда x_1 нүктесінде $f(x)$ функциясының максимумы [минимумы] ($\max[\min]$) бар болады, егер $f''(x_1) < 0$ [$f''(x_1) > 0$].

Е с к е р т у . $f(x) \in C[a,b]$ болсын. Онда $f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралығында ең үлкен және ең кіші мәнін не кризистік нүктелерде, не кесіндінің шеткі нүктелерінде қабылдайды.



Қисықтың ойыс және дөңестігі. Иілу нүктелері

Анықтама1. $y = f(x)$ қисығы дөңес (ойыс) деп аталады, егер бұл қисықтың барлық нүктелері оның жанамаларының төменгі (жоғарғы) жағында орналасса.



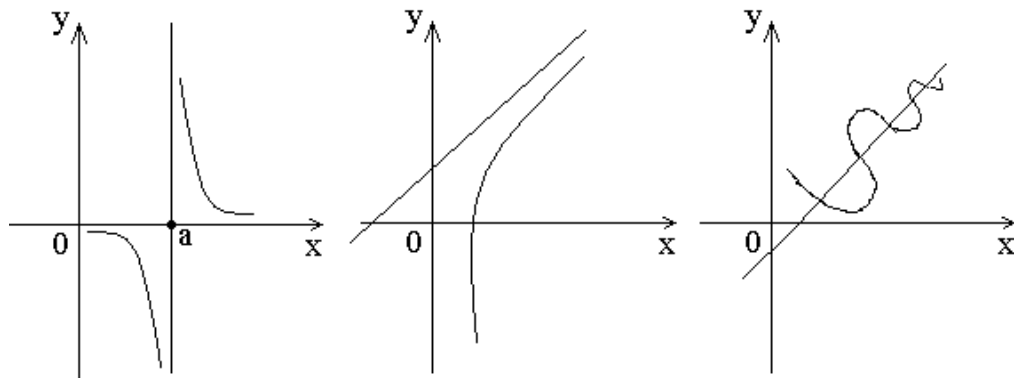
Суретте (a, c) аралығы $y = f(x)$ қисығының дөңес болатын, (c, b) – ойыс болатын аралығы. $x = c$ нүктесі $y = f(x)$ қисығының иілу нүктесі деп аталады, егер оны басып өткенде $y = f(x)$ қисығы ойыстығын дөңестікке немесе керісінше, дөңестігін ойыстыққа ауыстыратын болса.

Теорема3. (a, b) аралығында $f''(x)$ табылып, $f''(x) < 0$ [$f''(x) > 0$], $\forall x \in (a, b)$ орындалатын болса, онда $y = f(x)$ қисығы (a, b) аралығында дөңес (ойыс).

Теорема 4. x_0 аймағында (x_0 нүктесінің өзі болуы мүмкін), $f''(x)$ табылып, $f''(x_0) = 0$ немесе $f''(x_0)$ анықталмаған болса және $x = x_0$ нүктесінен өткенде $f''(x)$ таңбасын өзгертсе, онда x_0 нүктесі - иілу нүктесі болады.

Қисықтың асимптоталары

Анықтама 2. Түзу қисықтың асимптотасы деп аталады, егер қисықтың M ағымдық нүктесінен түзуге дейінгі ара қашықтық, M нүктесін шексіздікке жылжытқан сайын нөлге ұмтылатын болса.



а) – вертикаль асимптота, б) және в) – көлбеу асимптоталар.

Қисық $y = f(x)$ теңдеуімен берілсін. $x \rightarrow a - 0$ немесе $x \rightarrow a + 0$ ұмтылғанда $f(x)$ функциясының шегі $\pm \infty$ -ке ұмтылатын болса, онда $x = a$ түзуін вертикаль асимптота деп атаймыз.

$y = kx + b$ түзуі көлбеу асимптота деп аталады, егер

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$$

теңдіктерімен анықталса.